GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MATEMATICĂ
EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASA A IX – A PROFIL TEHNOLOGIC

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2025

CUPRINS

1. Mulțimi și elemente de logică matematică
1.1 Mulțimea numerelor reale
1.1.1 Numere raționale
a) Scurtă teorie

1. Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, \ 2, \cdots, \}$.

2. Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, \ 1, \ 2, \cdots, \}$.

3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.

b) Fracțiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.

c) **Mulțimea numerelor raționale**: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\right\}$.

În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).

b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.

5. Fracție zecimală. Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1 a_2 a_3 \cdots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \cdots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr infinit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală infinită**.

Fracțiile zecimale infinite care reprezintă numere raționale au o grupă de cifre care se repetă de o infinitate de ori și care se numește **perioadă**.

Perioada poate fi **simplă** sau **mixtă**.

b) Probleme alese rezolvate

1. Stabilește care din relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-2 \in \mathbf{N}$ b) $12 \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$ d) $2,(3) \in \mathbf{Q}$

Soluție. a) $-2 \notin \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

b) $12 \in \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația este adevărată.

c) $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

d) $2,(3) = 2 + \frac{3}{9} = \frac{2\cdot 9+3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \in \mathbf{Q}$.

2. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{29}{3}$.

Soluție. Avem: $\frac{1}{2} = 0,5$ și $\frac{29}{3} = 9,(6)$. Numerele căutate sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Determină 6 numere raţionale cuprinse între:

a) -1 şi 2 b) $-\frac{3}{4}$ şi 5 c) 4 şi $\frac{25}{4}$.

Soluție. a) $0, 1 \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Alte 4 numere raționale pot fi:

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

4. Arată că fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente.

Soluție. Fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 63$.

5. Arată că fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile.

Soluție. Fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

6. Arată că fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile.

Soluție. Fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

7. Transformă fracțiile ordinare:

a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{15}{4}$ c) $\frac{125}{8}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{7}{5} = 1,4$ b) $-\frac{15}{4} = -3,75$ c) $\frac{125}{8} = 15,625$.

8. Transformă fracțiile ordinare:

a) $\frac{11}{3}$ b) $-\frac{17}{6}$ c) $\frac{41}{3}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{11}{3} = 3,666\cdots = 3,(6)$

b) $-\frac{17}{6} = -2,8333\ \cdots = -2,8(3)$.

c) $\frac{41}{3} = 13,666\ \cdots = 13,(6)$.

9. Transformă fracțiile zecimale:

a) $0,(6)$ b) $3,(21)$ c) $2,12(3)$

în fracții ordinare.

Soluție. a) $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) $3,(21) = 3 + \frac{21}{99} = 3 + \frac{7}{33} = \frac{106}{33}$.

c) $2,12(3) = 2 + \frac{123-12}{900} = 2 + \frac{111}{900} = 2 + \frac{37}{300} = \frac{637}{300}$

10. Determină $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

a) $\frac{6}{n+1}$ b) $\frac{n+6}{n+2}$ c) $\frac{2n+9}{n+3}$

Soluție. a) Fracția $\frac{6}{n+1}$ este echivalentă cu un număr natural dacă $n+1$ este divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6.
$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0; n+1 = 2 \Rightarrow n = 1; n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$ și $n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$. Deci $n = 0, 1, 2, 5$.

b) $\frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$. În continuare se procedează ca la a) și se obține $n = 0, 2$.

c) $\frac{2n+9}{n+3} = \frac{2n+6+3}{n+3} = \frac{2(n+3)+3}{n+3} = 2 + \frac{3}{n+3}$. Se procedează ca la a) și se obține $n = 0$.

11. Determină $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{n}{n+4}$ să fie echivalentă cu $\frac{3}{5}$.

Soluție. Fracția $\frac{n}{n+4}$ este echivalentă cu $\frac{3}{5}$ dacă $\frac{n}{n+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5n = 3n + 12 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6.$

12. Arată că fracția $\frac{3+6+9+\cdots+150}{4+8+12+\cdots+200}$ este reductibilă.

Soluție. $3 + 6 + 9 + \cdots + 150 = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$ și
$4 + 8 + 12 + \cdots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$.
Fracția este reductibilă deoarece atât numărătorul cât și numitorul sunt multipli de numărul $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$.

13. Arată că fracția $\frac{n(n+1)}{2n+4}$ este reductibilă.

Soluție. $n(n + 1)$ se divide cu 2, deoarece n și $n + 1$ sunt consecutive și $2n + 4 = 2(n + 2)$ se divide cu 2.
Atunci fracția este reductibilă.

14. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ să fie echivalente.

Soluție. Fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ sunt echivalente dacă $\frac{2}{7} = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2(x + 2) = 7 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x + 4 = 28 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12.$

15. Determină numărul natural n, astfel încât fracția $\frac{n+9}{n+3}$ să devină număr natural.

Soluție. $\frac{n+9}{n+3} = \frac{n+3+6}{n+3} = 1 + \frac{6}{n+3}$ și devine număr natural pentru: $n + 3 = 3 \Rightarrow n = 0$ și $n + 3 = 6 \Rightarrow n = 3$.

16. Arată că fracția $\frac{n^2+n}{4n+2}$ este reductibilă. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția.

Soluție. $\frac{n^2+n}{4n+2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ și este reductibilă deoarece $n(n + 1)$ se divide cu 2, ca produs de 2 numere naturale consecutive și $2(2n + 1)$ se divide prin 2. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția este 2.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:
a) $-2 \in \mathbf{Z}$ b) $-5 \in \mathbf{N}$ c) $\frac{5}{7} \in \mathbf{N}$ d) $\frac{3}{8} \in \mathbf{Q}$ e) $-9 \in \mathbf{Q}$.

2. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:
a) $-5 \in \mathbf{N}$ b) $7 \in \mathbf{N}$ c) $7,(3) \in \mathbf{N}$ d) $\frac{7}{8} \in \mathbf{Z}$ e) $2,5 \in \mathbf{Q}$.

3. Determină perechile de fracții echivalente dintre:
a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{15}$; d) $\frac{5}{2}$ și $\frac{20}{8}$; e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{7}{12}$.

4. Determină dintre fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{31}, \frac{15}{25}, \frac{17}{32}, \frac{27}{45}, \frac{12}{35}$ pe cele echivalente cu fracția $\frac{6}{10}$.

5. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{11}{2}$ și $\frac{45}{4}$.

6. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $-\frac{17}{3}$ și $\frac{71}{8}$.

7. Determină toate fracțiile de forma $\frac{n}{2}$ cuprinse între numerele naturale 3 și 9.

8. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{x+3}{27}$ să fie echivalente.

9. Determină fracțiile reductibile de la a) și ireductibile de la b):
a) $\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{10}{8}, \frac{11}{33}, \frac{15}{17}, \frac{17}{31}, \frac{27}{36}, \frac{15}{35}$ b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{11}{7}, \frac{12}{32}, \frac{15}{35}, \frac{17}{34}, \frac{27}{41}$.

10. Transformă fracția ordinară: a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{33}{7}$ în fracție zecimală. Calculează a zecea zecimală a fiecărei fracții.

11. Determină n astfel încât fracția $\frac{n-9}{n-3}$ să devină număr întreg.

12. Determină n astfel încât fracția $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$ să devină număr întreg. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n.

1.1.2 Numere iraţionale. Numere reale

a) Scurtă teorie

1. Număr iraţional = numărul reprezentat de o fracţie zecimală, infinită, neperiodică.

Exemple. a) $\sqrt{2} = 1,4142135\cdots$ b) $\sqrt{7} = 2,6457513\cdots$

2. Notăm **mulţimea tuturor numerelor iraţionale** cu $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

3. Număr real = orice număr raţional sau iraţional.

4. Notăm **mulţimea tuturor numerelor reale** cu **R** şi avem egalitatea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R}-\mathbf{Q})$.

Evident au loc relaţiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R}-\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}-\mathbf{Q}) = \varnothing$.

b) Probleme alese rezolvate

1. Precizaţi patru valori naturale pentru n astfel încât numărul $\sqrt{n^2-n+1}$ să fie iraţional.

Soluţie. Pentru $n = 2$ obţinem $\sqrt{2^2-2+1} = \sqrt{3} = 1,732\cdots$.
Pentru $n = 3$ obţinem $\sqrt{3^2-3+1} = \sqrt{7} = 2,645\cdots$.
Pentru $n = 4$ obţinem $\sqrt{4^2-4+1} = \sqrt{13} = 3,605\cdots$.
Pentru $n = 5$ obţinem $\sqrt{5^2-5+1} = \sqrt{21} = 4,582\cdots$.

2. Determinaţi $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^2+5}$ este raţional.

Soluţie. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încât să avem egalitatea:
$\sqrt{n^2+5} = m \Rightarrow n^2+5 = m^2 \Rightarrow m^2-n^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow (m+n)(m-n) = 5 \Rightarrow m+n = 5, m-n = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 3, n = 2$. Deci valoarea lui n este 2.

3. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ numerele de forma $\sqrt{5n+2}$ sunt iraţionale.

Soluţie. Dacă n este par, $n = 2k \Rightarrow 5n+2 = 10k+2$ şi are deci ultima cifră egală cu 2.

Dacă n este impar, $n = 2k+1 \Rightarrow 5n+2 = 5(2k+1)+2 = 10k+7$ şi are decă ultima cifră egală cu 7.

Numerele de forma $5n+2$ au ultima cifră 2 sau 7 şi nu pot fi pătrate perfecte. Atunci numerele $\sqrt{5n+2}$ sunt iraţionale.

4. Arătaţi că $\sqrt{2}$ este număr iraţional.

Soluţie. Presupunem că $\sqrt{2}$ este număr raţional. Atunci $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, unde p, q sunt ireductibile. Prin ridicare la pătrat $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, de unde p^2 este par, sau p este par. Atunci $p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow q^2 = 2m^2$, de unde q este par. Atunci p, q sunt reductibile (se divid cu 2), ceea ce este fals. Deci $\sqrt{2}$ este număr iraţional.

5. Fie x un număr iraţional. Să se demonstreze că:

a) Dacă $x > 0$, atunci $\sqrt{x}$ este iraţional.

b) Dacă $x \neq 0$, atunci $\frac{1}{x}$ este iraţional.

Soluţie. a) Presupunem prin absurd că $\sqrt{x} \in Q \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbf{Z}$. Atunci $x = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbf{Q}$, ceea ce este fals.

b) Presupunem prin absurd că $\frac{1}{x} \in Q \Rightarrow x \in Q$, ceea ce este fals.

6. Arată că dacă $a, b \in \mathbf{N}$ sunt impare, atunci $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbf{Q}$.

Soluţie. Fie $a = 2p+1, b = 2q+1 \Rightarrow a^2+b^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4\cdot(p^2+q^2+p+q)+2 = M4+2$ şi atunci rezultă că a^2+b^2 se divide cu 2 şi nu se divide cu 4. Presupunem prin absurd că $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{m}{n}$ şi $\frac{m}{n}$ fracţie ireductibilă. Atunci avem:
$(a^2+b^2)\cdot n^2 = m^2 \Rightarrow m = 2m_1$, de unde $(a^2+b^2)\cdot n^2 = 4m_1^2$, sau $n = 2n_1$ şi fracţia $\frac{m}{n}$ este reductibilă.

7. Arată că dacă x este raţional şi y iraţional, atunci $x+y$ este număr iraţional.

Soluţie. Presupunem că $x+y$ este raţional. Atunci $y = (x+y)-x \in Q$, ceea ce este fals.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină numerele raționale de forma $\sqrt{n+1}$, unde n este număr natural mai mic decât 10.

2. Determină toate numerele iraționale de forma $\sqrt{2n+1}$, unde n este număr natural pătrat perfect de 2 cifre.

3. Calculați $\sqrt{5}$ cu 7 zecimale. Determină de câte ori apare cifra 6 printre aceste zecimale.

4. Fie numerele: $\sqrt{16}, \sqrt{99}, \frac{3}{4}$, 1,(3), $\sqrt{121}, \sqrt{44}, \sqrt{75}$.
Determină dintre acestea toate numerele iraționale.

5. Determină numărul natural de o cifră n, astfel încât numărul $\sqrt{n+4}$ să fie rațional.

6. Determină numărul natural de două cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n+65}$ să fie natural de o cifră.

7. Determină toate numerele naturale de 2 cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n+10}$ să fie rațional.

8. Determină numărul natural n pentru care numărul $\sqrt{n^2+9}$ este rațional.

9. Determină toate numerele naturale n, astfel încât $\sqrt{n+6}$ să fie rațional și $\sqrt{n+6} \leq 6$.

10. Demonstrează că există o infinitate de numere iraționale.

11. Arătați că numărul $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este irațional.

12. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x+2y$ este număr irațional.

13. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x-y$ este număr irațional.

14. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $3x+2y$ este număr irațional.

1.1.3 Operații algebrice cu numere reale
Puteri cu exponent întreg.
a) Scurtă teorie

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x+y)+z=x+(y+z)$ $(\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x+y=y+x$ $(\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x+0=0+x=x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x+(-x)=(-x)+x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z=x(yz)$ $(\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy=yx$ $(\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x\cdot 1=1\cdot x=x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$;
numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
$$x(y+z)=xy+xz \ (\forall)x,y,z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.
a) $x-y=x+(-y), (\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
b) $x:y=x\cdot\frac{1}{y}, y \neq 0$.

d) Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

7) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$;
8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$;
11) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$, impar.

e) Alte formule algebrice utile

1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
2) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$;
3) $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - -2a^2b^2$;
4) $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
5) $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2)$;
6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;
8) a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.
9) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

f) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$.

b) Probleme alese rezolvate

1. Demonstrați egalitatea:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluție. Notăm: $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ (1). Avem de asemenea: $S = n + n - 1 + \cdots + 1$ (2). Adunând membru cu membru (1) și (2) obținem: $2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{1+2+\cdots+100}{1+2+\cdots+50}.$$

Soluție. Conform **1.** avem: $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = = 50 \cdot 101$ și $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51$.

$\frac{1+2+\cdots+100}{1+2+\cdots+50} = \frac{50 \cdot 101}{25 \cdot 51} = \frac{202}{51}$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{4}.$$

Soluție. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ și asemănător: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{20} \cdot \sqrt{4} = 4\sqrt{5}$. Atunci $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{3} + +5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$.

4. Verificați egalitatea:

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{50}.$$

Soluție. $\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$.
$\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$.

5. Raționalizați numitorul: $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$.

Soluție. $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{60}-\sqrt{10}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5-4} =$